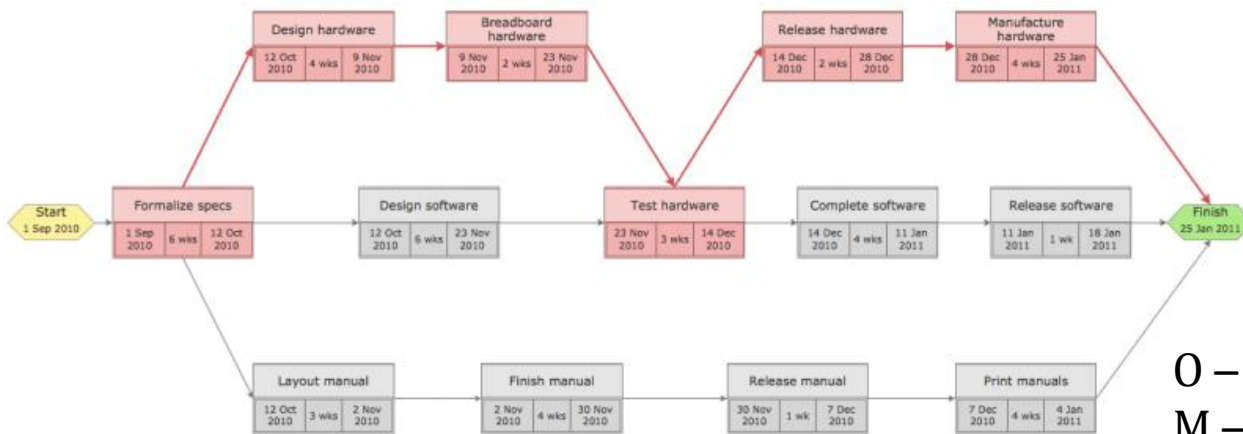


ПЛАНИРОВАНИЕ И ГРАФЫ

Сетевая структура проекта

Декомпозиция работ (work breakdown structure, WBS) и представление их в виде сети.
 CPM (Critical Path Method), PERT (Program/Project Evaluation and Review Technique),
 CCPM (Critical Chain Project Management), GERT (Graphical Evaluation and Review Technique) и др.



O – оптимистичная оценка длительности задачи
 M – наиболее вероятная оценка длительности задачи
 P – пессимистичная оценка длительности задачи

$$f_X(x) = \frac{1}{B(\alpha, \beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1}$$

Раннее начало	Длительность	Раннее окончание
Название задачи		
Позднее начало	Резерв времени	Позднее окончание

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx$$

Ожидаемая длительность задачи: $E = \frac{O + 4M + P}{6}$

Стандартное отклонение: $SD = \frac{P - O}{6}$

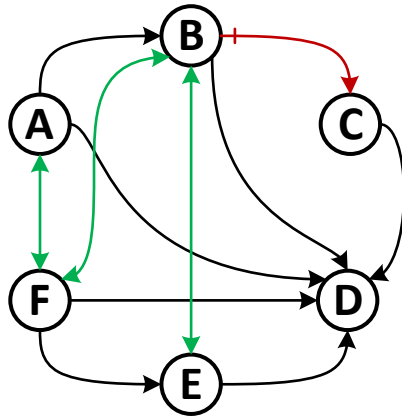
Пути в графе (1/3)

$A < B$, $B < C$, $C < D$,

$A \leq F$, $F < D$, $F < E$

$E < D$, $B \leq E$

$A < D$, $B < D$, $B \leq F$



M =

	A	B	C	D	E	F
A	1	1	0	1	0	1
B	0	1	1	1	1	1
C	0	0	1	1	0	0
D	0	0	0	1	0	0
E	0	1	0	1	1	0
F	1	1	0	1	1	1

M' =

	A	B	C	E	F
A	1	1	0	0	1
B	0	1	1	1	1
C	0	0	1	0	0
E	0	1	0	1	0
F	1	1	0	1	1

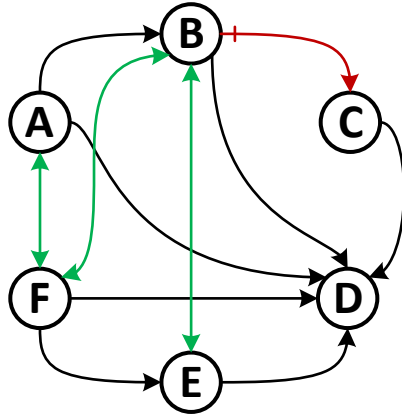
- 1) $M'_{aa} \cdot M'_{ac} = 1 \cdot 0 = 0$
- 2) $M'_{ab} \cdot M'_{bc} = 1 \cdot 1 = 1$
- 3) $M'_{ac} \cdot M'_{cc} = 0 \cdot 1 = 0$
- 4) $M'_{ae} \cdot M'_{ec} = 0 \cdot 0 = 0$
- 5) $M'_{af} \cdot M'_{fc} = 1 \cdot 0 = 0$

M'[2] =

	A	B	C	E	F
A	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1
C	0	0	1	0	0
E	0	1	1	1	1
F	1	1	1	1	1

Пути в графе (2/3)

$A < B$, $B < C$, $C < D$,
 $A \leq F$, $F < D$, $F < E$
 $E < D$, $B \leq E$
 $A < D$, $B < D$, $B \leq F$



$M''^{[2]} =$

	A	B	E	F
A	1	1	1	1
B	1	1	1	1
E	0	1	1	1
F	1	1	1	1

$M''^{[3]} =$

	A	B	E	F
A	1	1	1	1
B	1	1	1	1
E	1	1	1	1
F	1	1	1	1

Если $M^{[n+1]} = M^{[n]}$, то нет путей длины больше n .

$M^{[3]} =$

	A	B	E	F	C	D
A	1	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1
C	0	0	0	0	1	1
D	0	0	0	0	0	1

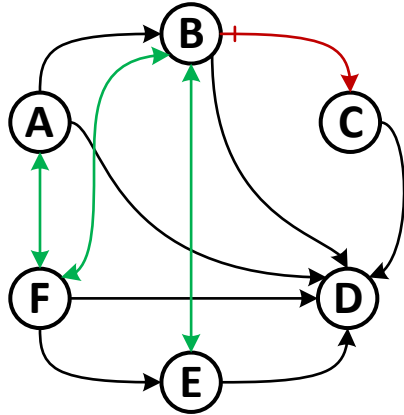
Пути в графе (3/3)

$A < B$, $B < C$, $C < D$,

$A \leq F$, $F < D$, $F < E$

$E < D$, $B \leq E$

$A < D$, $B < D$, $B \leq F$

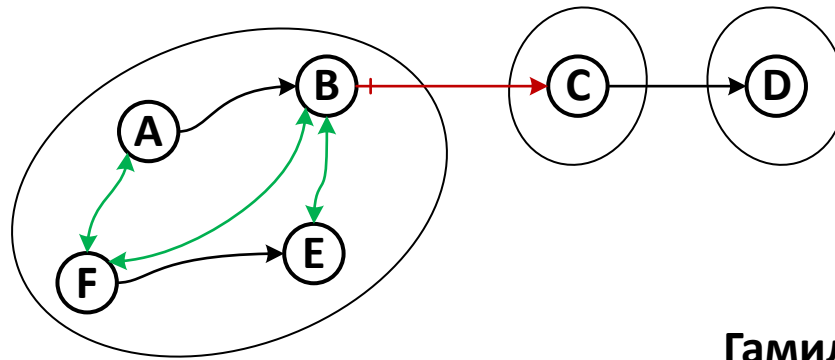


$M =$

	A	B	C	D	E	F
A	1	1	0	1	0	1
B	0	1	1	1	1	1
C	0	0	1	1	0	0
D	0	0	0	1	0	0
E	0	1	0	1	1	0
F	1	1	0	1	1	1

$M^{[3]} =$

	A	B	E	F	C	D
A	1	1	1	1	1	1
B	1	1	1	1	1	1
E	1	1	1	1	1	1
F	1	1	1	1	1	1
C	0	0	0	0	1	1
D	0	0	0	0	0	1



**Гамильтонов путь:
AFEBCD**

Алгоритм Уоршалла

Транзитивным замыканием графа $G(V,A)$ называется граф $G^*(V^*,A^*)$:

$V^*=V$, дуга $(x_i; x_j) \in A^* \Leftrightarrow x_j$ достижима из x_i в исходном графе (для всех вершин $x_i, x_j \in V^* = V$).

Задача. Пусть дан произвольный орграф G , заданный своей матрицей смежности C_G . Найти его матрицу достижимости R_G (она же матрица смежности его транзитивного замыкания C_{G^*}).

Последовательно строим матрицы $\mathbf{B}^0, \mathbf{B}^1, \dots, \mathbf{B}^n$:

1. $\mathbf{B}^0 := C_G$
2. $\mathbf{B}_{ij}^l := \mathbf{B}_{ij}^{l-1} \oplus [\mathbf{B}_{il}^{l-1} \& \mathbf{B}_{lj}^{l-1}]$, для $l=1, \dots, n$.
3. $R_G = \mathbf{B}^n$

$\mathbf{B}_{ij}^l = 1 \Leftrightarrow$ промежуточные вершины пути $[x_i; x_j]$ принадлежат $\{x_1, x_2, \dots, x_l\}$.

Для связывания вершин таким путем необходимо и достаточно хотя бы одного из условий:

1. существует путь от $[x_i; x_j]$, все промежуточные вершины которого принадлежат множеству $\{x_1, x_2, \dots, x_{l-1}\}$;
2. существуют пути от $[x_i; x_l]$ и от $[x_l; x_j]$, все промежуточные вершины которых принадлежат множеству $\{x_1, x_2, \dots, x_{l-1}\}$.

Сложность алгоритма $O(|V|^3)$

Факторизация графов

Бикомпонента = компонента сильной связности = максимальный сильно связный подграф (в котором есть путь между всеми парами вершин).

Граф Герца получается стягиванием каждой бикомпоненты в отдельную вершину.

Выделение бикомпонент:

разбить ненулевые строки $R_G \times R_G^T$ на группы одинаковых строк (номера строк – номера вершин).

Транзитивная редукция: По ациклическому орграфу $G_H(V_H, A_H)$ с множеством вершин V_H и множеством дуг A_H строится орграф $G'(V_H, A')$ так, что $A' \subseteq A_H$, вершина $w \in V_H$ достижима из вершины $v \in V_H$ в графе G' тогда и только тогда, когда w достижима из v в графе G_H , и $|A'|$ минимальна.

Для каждой дуги $a = (v; v') \in A_H$ строится критический путь $\mu[v; v']$. Если $\mu \neq (v; a; v')$, то рассматриваемая дуга удаляется. Сложность $O(|A_H| \cdot |V_H|^2)$.

Построение критического пути

Алгоритм построения критического пути.

- I. Положим $x_0=v$, $x_n=v'$ и припишем всем дугам $a \in A_H$ веса $p(a)=-1$.
- II. Прямой ход алгоритма Дейкстры (расстановка меток):
 - $\lambda(x_0)=0$;
 - $\lambda(x_0)$ объявляем постоянной меткой;
 - всем вершинам $y \in \Gamma(x_0)$ (смежным с x_0) приписываем временные метки $\lambda(y)=p(x_0;y)$;
 - пусть x_1 - вершина графа с наименьшей временной меткой, тогда $\lambda(x_1)$ объявляем постоянной меткой;
 - Для всех $i=1, \dots, n$
 - a. Для всех $y \in \Gamma(x_i)$, если y не имеет временной метки, то $\lambda(y):=\lambda(x_i)+p(x_i;y)$; иначе $\lambda(y)=\min\{\lambda(y); \lambda(x_i)+p(x_i;y)\}$;
 - b. положить $x_{i+1} :=$ вершина графа с наименьшей временной меткой;
 - c. $\lambda(x_{i+1})$ объявляем постоянной меткой.
- III. Итерационный шаг обратного хода алгоритма Дейкстры (поиск пути): пусть y_r – последняя найденная вершина пути (в начале это вершина x_n). В качестве вершины y_{r-1} берется вершина x , такая, что $x \in \Gamma^{-1}(y_r)$ и $\lambda(x)=\lambda(y_r)-p(x;y_r)$. Алгоритм заканчивается, когда будет достигнута вершина x_0 .

Паросочетания (1/3)

Паросочетание – набор ребер, не имеющих общих вершин. Оно *совершенное*, если покрывает все вершины графа.

Двудольный граф – множество вершин разбито на 2 непересекающихся подмножества, при этом концы любого ребра лежат в разных подмножествах.

Пусть мощности «долей» графа – m и d .

Теорема Холла (лемма о девушках). Если для любого $k=1,2,\dots,m$ любые k мальчиков знакомы в совокупности хотя бы с k девочками, то можно одновременно поженить каждого мальчика на знакомой девочке (т.е. существует паросочетание, покрывающее всех мальчиков).

Индукцией по m . При $m=1$ очевидно. Пусть утверждение верно для $m-1$. Возможны 2 случая

1. Любые $k=1,2,\dots,m-1$ мальчиков знают *строго больше*, чем k девочек. Тогда поженим одного мальчика на знакомой девочке. Для оставшихся $(m-1)$ мальчика и $(d-1)$ девочки выполнено условие теоремы и утверждение верно по индукционному предположению.

2. Есть k мальчиков, знакомых ровно с k девочками ($1 \leq k \leq m-1$). Поженим их на знакомых девочках (по предположению индукции). Для оставшихся мальчиков условие также выполнено (если l оставшихся знают меньше, чем l оставшихся девочек, то изначально $l+k$ мальчиков знали меньше, чем $l+k$ девочек).

Паросочетания (1/3)

Теорема Холла (лемма о девушках). Если для любого $k=1,2,\dots,m$ любые k мальчиков знакомы в совокупности хотя бы с k девочками, то можно одновременно поженить каждого мальчика на знакомой девочке (т.е. существует паросочетание, покрывающее всех мальчиков).

Обобщенная теорема Холла. Пусть $0 \leq s \leq m$ – целое неотрицательное число. Если любые $k=s, s+1, \dots, m$ мальчиков знают не меньше, чем $k-s$ девочек, то можно одновременно поженить хотя бы $m-s$ мальчиков.

Позовем s специальных девочек и познакомим их со всеми мальчиками. Для нового графа выполнено условие теоремы Холла. Поженим мальчиков. Хотя бы $m-s$ мальчиков женаты не на специальных девочках.

Паросочетания (2/3)

Теорема Кенига. Наибольшее количество ребер в паросочетании двудольного графа G равно наименьшему количеству вершин в вершинном покрытии графа G .

Вариант формулировки. В некоторых ячейках прямоугольной таблицы расставлены пометки. Наибольшее количество пометок, не стоящих попарно в одной строке или одном столбце, равно наименьшему количеству рядов (ряд - строка или столбец), содержащих все пометки.

Доли двудольного графа – строки и столбцы, ребра – если на пересечении строки и столбца стоит пометка.

Путь A – наибольшее количество ребер в паросочетании, B – наименьшее количество вершин в вершинном покрытии.

Очевидно, что каждое ребро паросочетания должно содержать вершину из вершинного покрытия, поэтому $A \leq B$. Докажем, что $A \geq B$, т.е. существует паросочетание из B ребер.

Достаточно показать, что выполняется условие обобщенной т. Холла для $s=m-B$.

От противного. Пусть k мальчиков-блондинов знают не больше, чем $k-s-1=k-m+B-1$ девочек-блондинок. Рассмотрим оставшихся (брюнетов и брюнеток). Это всего $(m-k)+(k-m+B-1)=B-1$ человек. Т.к. блондины не знают брюнеток, эти $B-1$ человек образуют вершинное покрытие графа G , что противоречит минимальности B .

Паросочетания (3/3)

Пусть дана матрица M размера $m \times n$, некоторые элементы которой являются нулями, а другие произвольны. Обозначим через (L) совокупность всех строк L_1, L_2, \dots, L_m матрицы, а через (C) – совокупность всех ее столбцов C_1, C_2, \dots, C_n .

Множество рядов матрицы называется *опорным*, если удаление из матрицы этих рядов приведет к исчезновению из нее всех нулей. Очевидно, что минимальное (наименьшей мощности) опорное множество должно содержать не более, чем $\min(m, n)$ рядов.

Минимальное число рядов в опорном множестве матрицы M – *индекс рассредоточения* этой матрицы $D(M)$.

Совокупность k нулей матрицы образуют *связку* k строк и k столбцов, если эти k нулей стоят на пересечении k различных строк и k различных столбцов. Максимальной называется связка, содержащая наибольшее число нулей.

Это число называется *индексом квадратности* матрицы M и обозначается через $Q(M)$.

Теорема Кёнига (Кёнига-Эгервари). $D(M) = Q(M)$. Иначе говоря, минимальное число рядов опорного множества равно максимальному числу нулей связки.

Потоки в сетях

Сеть $G=(V,A,s,t,C)$

$C: A \rightarrow \mathbb{R}, c(x, y) \geq 0$

$C: A \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

Обозначения:

$X \subset V, Y \subset V; (X, Y) = \{(x, y) \in A \mid x \in X, y \in Y\}$

Для любой $g: A \rightarrow \mathbb{R}, g(X, Y) = \sum_{(x,y) \in (X,Y)} g(x, y)$

$\bar{X} = V \setminus X$

Разрез: множество дуг $(X, \bar{X}) \mid s \in X, t \in \bar{X}$

$f(x, y): A \rightarrow \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ – поток из s в t величины v

$$\sum_{y \in V \mid (x,y) \in A} f(x, y) - \sum_{y \in V \mid (y,x) \in A} f(y, x) = \begin{cases} v, & x = s \\ 0, & x \neq s, t \\ -v, & x = t \end{cases}$$

$$f(x, y) \leq c(x, y) \quad \forall (x, y) \in A$$

Лемма 1. Пусть f – поток величины v из s в t в сети $G(V,A)$, (X, \bar{X}) – разрез, отделяющий s и t . Тогда

$$v = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) \leq c(X, \bar{X})$$

f – поток $\Rightarrow f(s, V) - f(V, s) = v; f(s, V) - f(V, s) = 0$ для $x \neq s, t; f(t, V) - f(V, t) = -v$.

Сложим те, которые относятся к $x \in X$, учитывая, что $s \in X, t \in \bar{X}, V = X \cup \bar{X}$:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{x \in X} (f(x, V) - f(V, x)) = f(X, V) - f(V, X) = f(X, X \cup \bar{X}) - f(X \cup \bar{X}, X) = \\ &= f(X, X) + f(X, \bar{X}) - f(X, X) - f(\bar{X}, X) = f(X, \bar{X}) - f(\bar{X}, X) \end{aligned}$$

Равенство доказано. Неравенство следует из $f(X, \bar{X}) \leq c(X, \bar{X}), f(\bar{X}, X) \geq 0$.

Теорема Форда-Фалкерсона

Теорема. В любой сети максимальная величина потока из s в t равна минимальной пропускной способности разреза, отделяющего s и t .

По Лемме 1 $f \leq c(X, \bar{X})$.

Пусть f – максимальный поток. Определим разрез, для которого $f(X, \bar{X}) = c(X, \bar{X}), f(\bar{X}, X) = 0$.

1) $s \in X$;

2) если $x \in X$ и $f(x, y) < c(x, y)$, то $y \in X$; если $x \in X$ и $f(y, x) > 0$, то $y \in X$.

$t \in \bar{X}$. Если нет, то $\exists s = x_1, x_2, \dots, x_n = t \mid \forall (x_i, x_{i+1}) : f(x_i, x_{i+1}) < c(x_i, x_{i+1}); \forall (x_{i+1}, x_i) : f(x_{i+1}, x_i) > 0$.

Пусть $\varepsilon_1 = \min(c - f)$ по всем прямым дугам этого пути, $\varepsilon_2 = \min(f)$ по обратным, $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$.

Увеличим поток на всех прямых дугах на ε и уменьшим на всех обратных на ε .

Получим поток из s в t величины $v + \varepsilon$, что противоречит максимальнойности f .

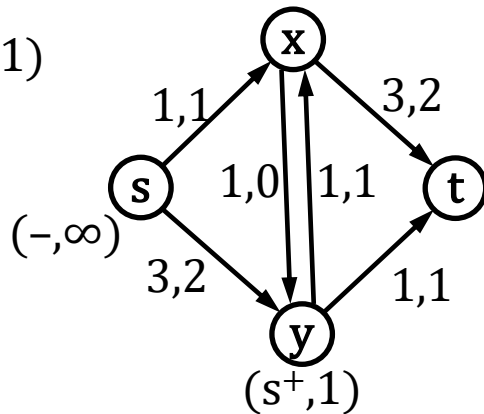
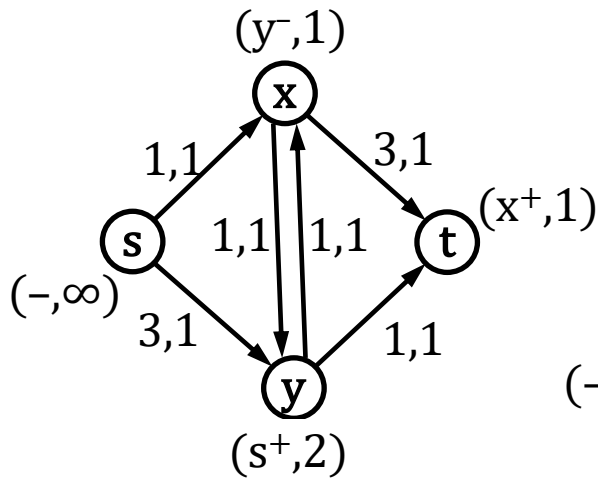
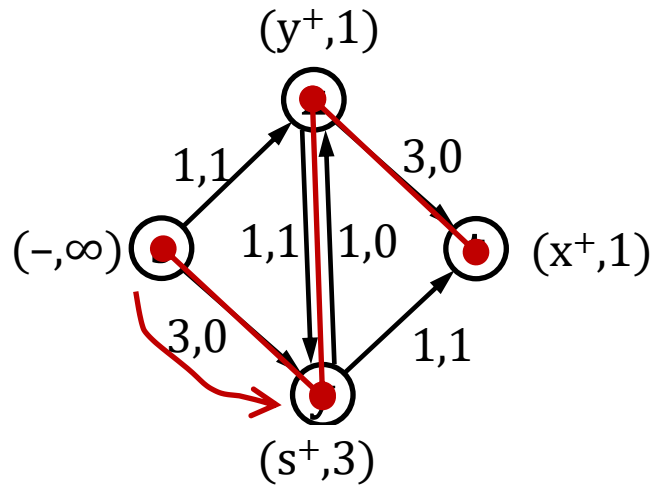
(X, \bar{X}) – разрез, отделяющий s и t . Из определения X следует, что

$f(x, x') = c(x, x'), (x, x') \in (X, \bar{X}); f(x', x) = 0, (x', x) \in (\bar{X}, X)$. (Иначе $x' \in X$.)

Поэтому $f(X, \bar{X}) = c(X, \bar{X}), f(\bar{X}, X) = 0$.

Алгоритм пометок Форда-Фалкерсона

Пометка дуги: $(c(x,y), f(x,y))$



A.0) Источник s : $(-, \varepsilon(s) = \infty)$

A.1) $\forall x$ (помечен, не просмотрен, пометка $(z^\pm, \varepsilon(x))$)

A.1.1) \forall непомеченного $y \mid f(x,y) < c(x,y)$

пометка: $(x^+, \varepsilon(y) = \min[\varepsilon(x), c(x,y) - f(x,y)])$

A.1.2) \forall непомеченного $y \mid f(y,x) > 0$ пометка:

$(x^-, \varepsilon(y) = \min[\varepsilon(x), f(y,x)])$

A.1.2) x – помечен и просмотрен

A.2) Сток помечен (прорыв) \Rightarrow Процедура В (изменение потока). Иначе – всё.

B.1) Если пометка стока $(y^+, \varepsilon(t))$, то

$f(y,t) := f(y,t) + \varepsilon(t)$, иначе $(y^-, \varepsilon(t)) \Rightarrow$

$f(t,y) := f(t,y) - \varepsilon(t)$. Переходим к y .

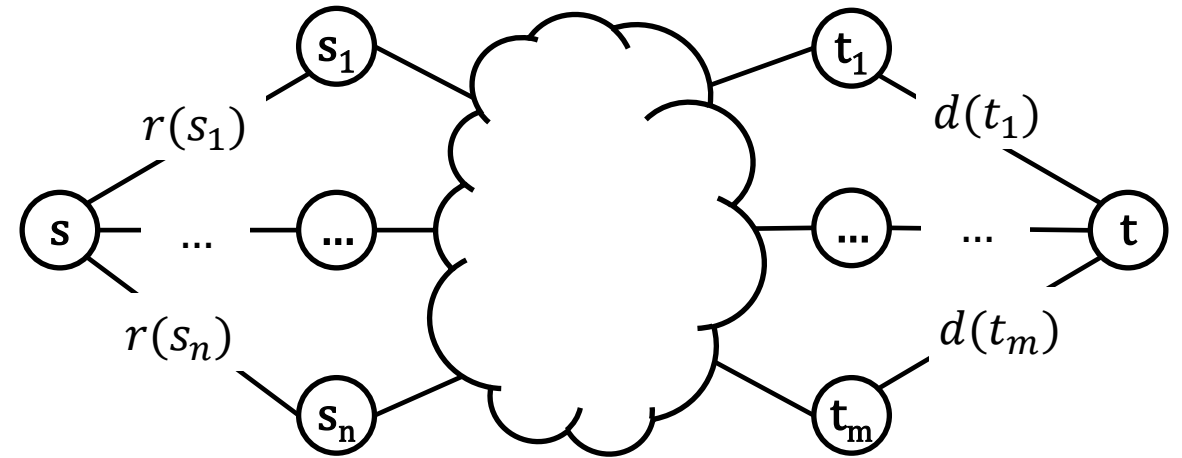
B.2) y с пометкой $(x^+, \varepsilon(y)) \Rightarrow f(x,y) := f(x,y) + \varepsilon(t)$,

y с пометкой $(x^-, \varepsilon(y)) \Rightarrow f(y,x) := f(y,x) - \varepsilon(t)$

B.3) Достигли s . Стерли пометки узлов, все снова.

Алгоритм Гомори-Ху (1/2)

Пусть выделено n источников s_1, s_2, \dots, s_n , которым приспаны имеющиеся в них запасы $r(s_1), \dots, r(s_n)$, и m стоков t_1, t_2, \dots, t_m , для которых заданы потребности $d(t_1), \dots, d(t_m)$.



Задача. Найти максимальный поток для всех пар узлов в неориентированной сети.

Пусть $G = (N, A)$ - неориентированная сеть, где $N = \{1, 2, \dots, n\}$ - множество узлов, A - множество дуг, c_{ij} - пропускная способность дуги (i, j) из A , и $c_{ij} = c_{ji}$. $(X, \bar{X})_{ij}$ - минимальный разрез, отделяющий i от j ($i \in X, j \in \bar{X}$), с пропускной способностью $C(X, \bar{X})_{ij}$.

Используем данные предыдущего шага, выбирая пару вершин в X или \bar{X} .

Тогда второе множество может быть сконденсировано в один узел (величина потока из i в j не изменится).

Пусть конденсируется \bar{X} . Пусть j_1, j_2, \dots, j_r - узлы из \bar{X} , непосредственно связанные с узлом $i \in X$.

Дуги заменяются одной, $c_{i\bar{X}} = \sum_{m=1}^r c_{ij_m}$.

Находим поток (и разрез), повторяем с другой парой. Достаточно $(n-1)$ итераций (а не $n(n-1)/2$).

Алгоритм Гомори-Ху (2/2)

Пусть $G = (N, A)$ - неориентированная сеть, и пусть пропускные способности всех дуг из A : $c_{ij} = c_{ji}$.

$$(1) \quad v_{ij} \geq \min[v_{ii_1}, v_{i_1i_2}, v_{i_2i_3}, \dots, v_{i_rj}],$$

где $\{i, i_1, i_2, \dots, i_r, j\}$ – связное множество узлов из N .

В максимальном остовном дереве

$$(2) \quad w_{ij} \leq \min[w_{ii_1}, w_{i_1i_2}, w_{i_2i_3}, \dots, w_{i_rj}],$$

где (i, j) – произвольная дуга, не принадлежащая дереву, $\{i, i_1, i_2, \dots, i_r, j\}$ – единственный путь в дереве, w_{ij} – вес дуги сети.

Для любой дуги (i, j) , не принадлежащей дереву,

$$(3) \quad v_{ij} = \min[v_{ii_1}, v_{i_1i_2}, v_{i_2i_3}, \dots, v_{i_rj}],$$

где $\{i, i_1, i_2, \dots, i_r, j\}$ – связная последовательность узлов дерева, принадлежащих пути из i в j .

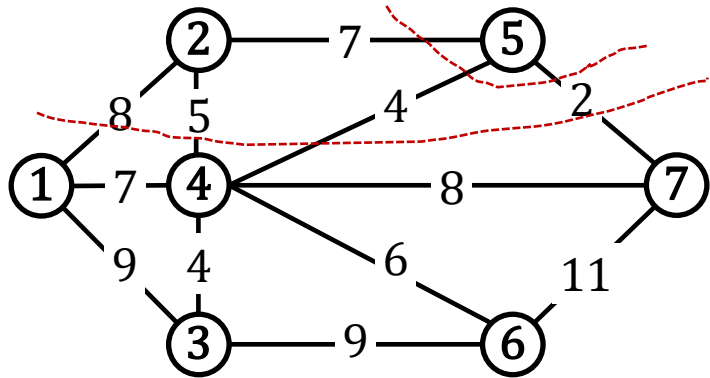
Пусть $i, j, k \in N$. Из т. Ф.-Ф., $v_{ij} = C(X, \bar{X})_{ij}$. Если $k \in \bar{X}$, то $v_{ik} \leq C(X, \bar{X})_{ij}$, а если $k \in X$, то $v_{kj} \leq C(X, \bar{X})_{ij}$.
 $\Rightarrow v_{ij} \geq v_{kj}, v_{ij} \geq v_{ik} \Rightarrow v_{ij} \geq \min[v_{ik}, v_{kj}]$.

Повторяем рассуждения для v_{ik}, v_{kj} и т.д.

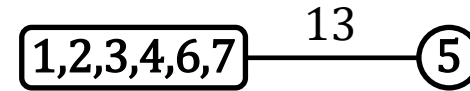
Иначе вместо любой дуги пути из i в j можно взять дугу (i, j) , и получить дерево с большим весом.

Если в (2) веса w_{ij} дуг остовного дерева положить равными v_{ij} и применить (1).

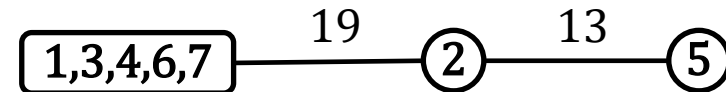
Алгоритм Гомори-Ху – пример (1/2)



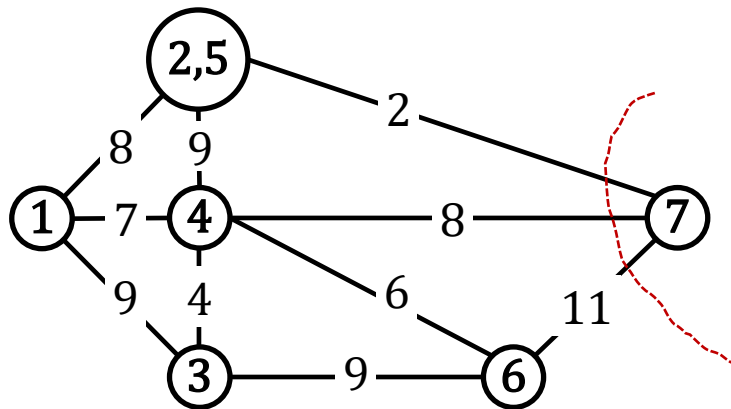
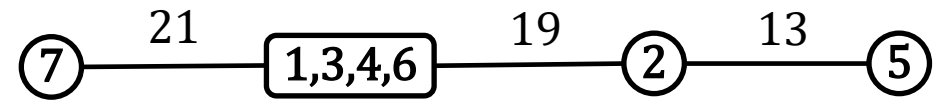
Итерация 1. $s=2, t=5. v_{25} = v_{52} = 13.$



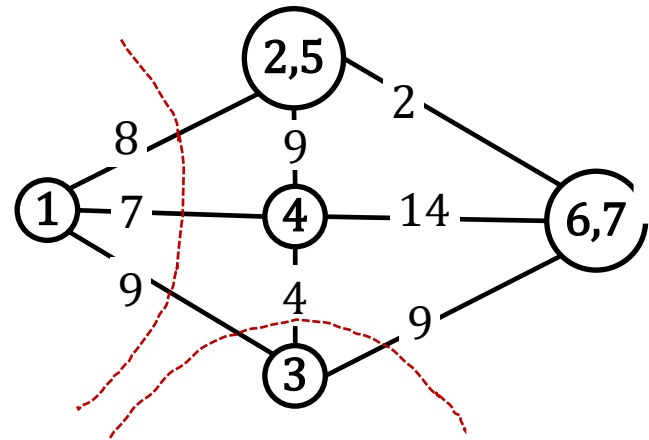
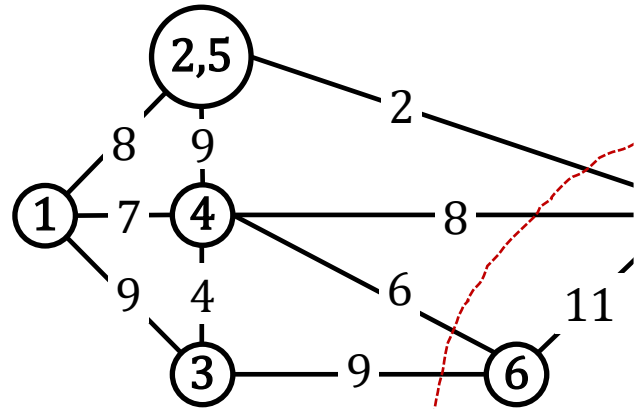
Итерация 2. $s=1, t=2. v_{12} = v_{21} = 19.$



Итерация 3. $s=6, t=7. v_{67} = v_{76} = 21.$



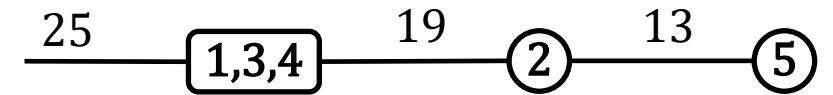
Алгоритм Гомори-Ху – пример (2/2)



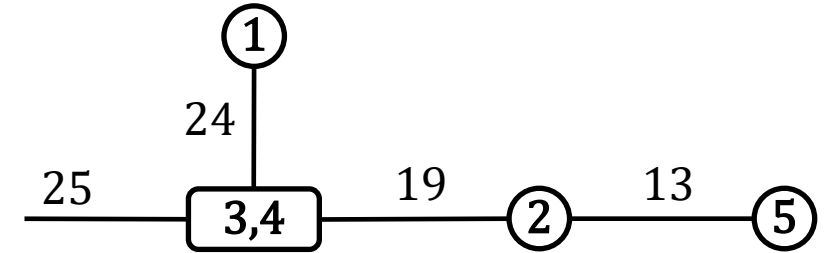
Итерация 4. $s=4, t=6. v_{46} = v_{64} = 25.$

$V=$

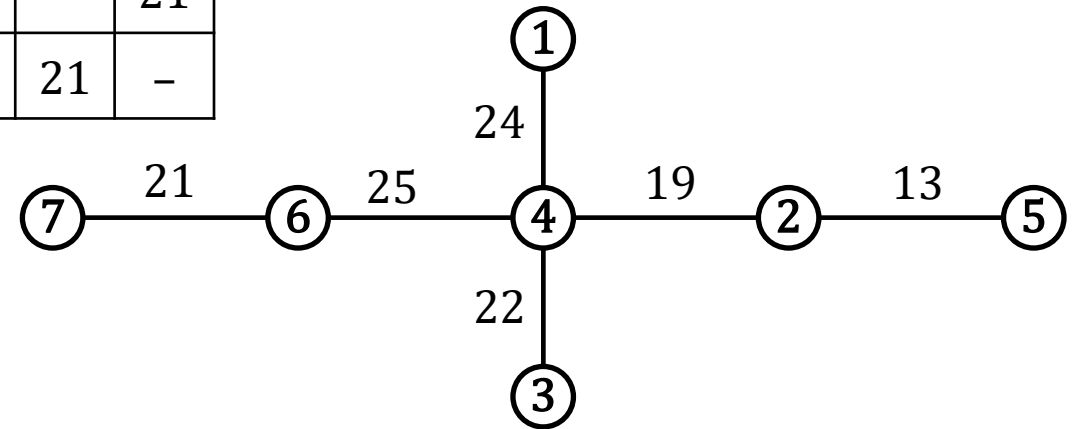
-	19	22	24	13	24	21
19	-	19	19	13	19	19
22	19	-	22	13	22	21
24	19	22	-	13	25	21
13	13	13	13	-	13	13
24	19	22	25	13	-	21
21	19	21	21	13	21	-



$1, t=4. v_{14} = v_{41} = 24.$



$3, t=4. v_{34} = v_{43} = 22.$



Теорема Кенига-Эгервари

Теорема. Минимальное число рядов опорного множества $D(M)$ равно максимальному числу нулей связки $Q(M)$.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
L_1	0				
L_2	0				
L_3		0	0	0	
L_4					0

$Q(M)$ = значению
максимального потока

$D(M)$ = минимальной
пропускной способности
разреза

Пусть $L^+ = \{L_{i_1}, \dots, L_{i_p}\}$, $C^+ = \{C_{j_1}, \dots, C_{j_q}\}$ – строки и столбцы опорного множества.

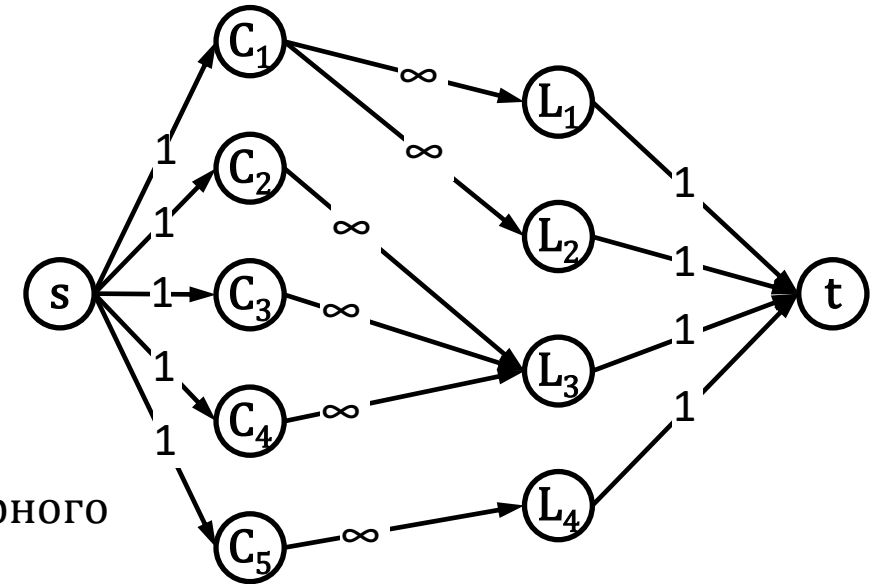
$L^+ = \{L_1, L_2, L_3\}$, $C^+ = \{C_5\}$. $L^- = \{L_4\}$, $C^- = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$.

Пусть $\varepsilon = \{t\} \cup L^- \cup C^+$ (в примере $\varepsilon = \{t, L_4, C_5\}$).

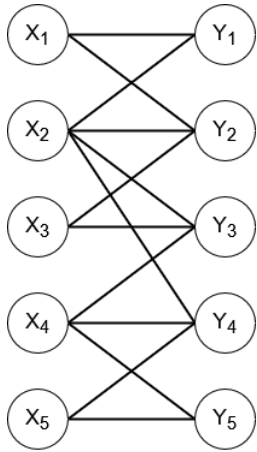
Дуги вида (x, t) , $x \notin \varepsilon : \forall L_i \in L^+ \exists! (L_i, t), c(L_i, t) = 1, |L^+| = p$

Дуги вида (x, y) , $x \notin \varepsilon, y \in L^-$: таких нет

Дуги вида (x, y) , $x \notin \varepsilon, y \in C^+ : \forall C_i \in C^+ \exists! (s, C_i), c(s, C_i) = 1, |C^+| = q$



Венгерский метод (1/5)



	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅
X ₁	1	1			
X ₂	1		1	1	
X ₃		1	1		
X ₄			1	1	1
X ₅				1	1

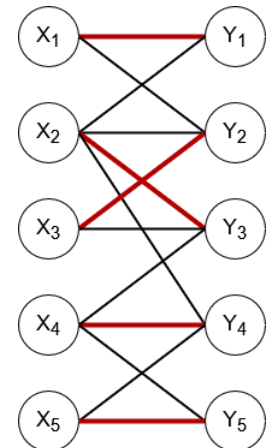
	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅
X ₁	1	1			
X ₂	1		1	1	
X ₃		1	1		
X ₄			1	1	1
X ₅				1	1

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅
X ₁	1	1			
X ₂	1		1	1	
X ₃		1	1		
X ₄			1	1	1
X ₅				1	1

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅
X ₁	1	1			
X ₂	1		1	1	
X ₃		1	1		
X ₄			1	1	1
X ₅				1	1

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅
X ₁	1	1			
X ₂	1		1	1	
X ₃		1	1		
X ₄			1	1	1
X ₅				1	1

$X_1Y_1, X_2Y_3, X_3Y_2, X_4Y_4, X_5Y_5$



Венгерский метод (2/5)

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	u_i
X ₁	3	5	7	2	1	1
X ₂	4	6	7	3	1	1
X ₃	2	1	3	4	5	1
X ₄	6	3	2	7	8	2
X ₅	5	4	3	1	9	1
v_j	1	0	0	0	0	

$$c'_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j); i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n}$$

Положим

$$u_i = \min_j c_{ij}$$

$$v_j = \min_i (c_{ij} - u_i)$$

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅
X ₁	1	4	6	1	0
X ₂	2	5	6	2	0
X ₃	0	0	2	3	4
X ₄	3	1	0	5	6
X ₅	3	2	2	0	8

Общие затраты

$$C(\gamma_1) = 3 + 6 + 3 + 7 + 9 = 28$$

$$C(\gamma_2) = 1 + 3 + 3 + 3 + 5 = 15$$

$$\Delta = C(\gamma_1) - C(\gamma_2) = 28 - 15 = 13$$

Общие затраты

$$C'(\gamma_1) = 1 + 5 + 2 + 5 + 8 = 21$$

$$C'(\gamma_2) = 0 + 2 + 2 + 1 + 3 = 8$$

$$\Delta' = C'(\gamma_1) - C'(\gamma_2) = 21 - 8 = 13$$

$$C'(\gamma_1) = C(\gamma_1) - \left(\sum_i u_i + \sum_j v_j \right)$$

$$C'(\gamma_2) = C(\gamma_2) - \left(\sum_i u_i + \sum_j v_j \right)$$

$$\Delta' = C'(\gamma_1) - C'(\gamma_2) = C(\gamma_1) - C(\gamma_2) - \sum_i u_i + \sum_i u_i - \sum_j v_j + \sum_j v_j = C(\gamma_1) - C(\gamma_2) = \Delta$$

Венгерский метод (3/5)

Если $u_i + v_j \leq c_{ij}$ для всех c_{ij} то для любой связки γ

$$C(\gamma) \geq \sum_i u_i + \sum_j v_j$$

Если существуют u_i и $v_j \mid u_i + v_j \leq c_{ij}$ для всех i и j , и существует связка $\gamma \mid C(\gamma) = \sum_i u_i + \sum_j v_j$, то

$C(\gamma)$ – минимально, а $S = \sum_i u_i + \sum_j v_j$ – максимально.

Насыщенная связка из дуг для которых $c_{ij} = u_i + v_j$ (или $c'_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j) = 0$), тогда

$$C(\gamma) = c_{i_1 j_1} + c_{i_n j_n} = (u_{i_1} + v_{j_1}) + \dots + (u_{i_n} + v_{j_n}),$$

$$C(\gamma) = (u_{i_1} + v_{j_1}) + \dots + (u_{i_n} + v_{j_n}) = \sum_i u_i + \sum_j v_j = S$$

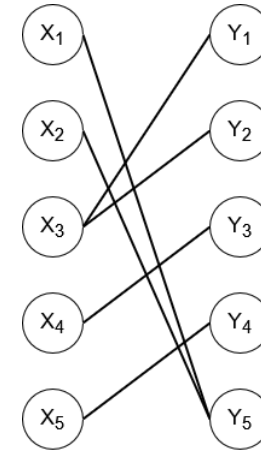
Венгерский метод (4/5)

$$C =$$

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅
X ₁	3	5	7	2	1
X ₂	4	6	7	3	1
X ₃	2	1	3	4	5
X ₄	6	3	2	7	8
X ₅	5	4	3	1	9

$$C'_1 =$$

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅
X ₁	1	4	6	1	0
X ₂	2	5	6	2	0
X ₃	0	0	2	3	4
X ₄	3	1	0	5	6
X ₅	3	2	2	0	8



	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅
X ₁					0
X ₂					0
X ₃	0	0			
X ₄			0		
X ₅				0	

$$\gamma'_1 = (X_1 Y_5, X_3 Y_2, X_4 Y_3, X_5 Y_4)$$

$$\gamma_1 = \{\gamma'_1, X_2 Y_1\} = (X_1 Y_5, X_2 Y_1, X_3 Y_2, X_4 Y_3, X_5 Y_4)$$

$$C(\gamma_1) = 1 + 4 + 1 + 2 + 1 = 9, \quad S_1 = \sum_i u_i + \sum_j v_j = 1 + 1 + 1 + 2 + 1 + 1 = 7 \Rightarrow S_1 < C(\gamma_1)$$

Опорное множество X_3, X_4, X_5, Y_5 .

Удаляем эти ряды в C'_1 . Получаем K' .

Наименьший элемент $k = 1 = C'_{11} = C'_{14}$

$$K' =$$

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄
X ₁	1	4	6	1
X ₂	2	5	6	2

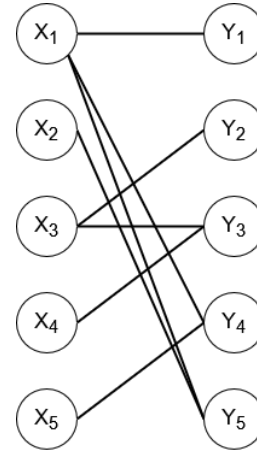
Венгерский метод (5/5)

$$C'_1 =$$

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅
X ₁	1	4	6	1	0
X ₂	2	5	6	2	0
X ₃	0	0	2	3	4
X ₄	3	1	0	5	6
X ₅	3	2	2	0	8

$$C'_2 =$$

	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅	u_i
X ₁	0	3	5	0	0	2
X ₂	1	4	5	1	0	2
X ₃	0	0	2	3	5	1
X ₄	3	1	0	5	7	2
X ₅	3	2	2	0	9	1
v_j	1	0	0	0	-1	



	Y ₁	Y ₂	Y ₃	Y ₄	Y ₅
X ₁	0			0	0
X ₂					0
X ₃	0	0			
X ₄			0		
X ₅				0	

Положим $u'_i = u_i + k$, если строка i не входит в опорное множество, и $v'_j = v_j - k$, если столбец j в него входит. И делаем $C'_2: c'_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$

$$u'_1 = u_1 + k = 1 + 1 = 2; u'_2 = u_2 + k = 1 + 1 = 2;$$

$$u'_3 = u_3 = 1; u'_4 = u_4 = 2; u'_5 = u_5 = 1;$$

$$v'_1 = v_1 = 1; v'_2 = v_2 = 0; v'_3 = v_3 = 0; v'_4 = v_4 = 0;$$

$$v'_5 = v_5 - k = 0 - 1 = -1.$$

$$S_2 = (2 + 2 + 1 + 2 + 1) + (1 + 0 + 0 + 0 - 1) = 8$$

$$S_2 > S_1$$

Опорное множество $D(M) = Q(M)$, I строк, J столбцов

$$S_2 = S_1 + k(n - I) - kJ = S_1 + k(n - (I + J))$$

т.к. $I + J = Q(M) < n \Rightarrow k(n - (I + J)) > 0$

$$\gamma'_2 = (X_1Y_1, X_2Y_5, X_3Y_2, X_4Y_3, X_5Y_4) = \gamma_2$$

$$C(\gamma_2) = 3 + 1 + 1 + 2 + 1 = 8 = S_2$$